A.Ü. FEN FAKÜLTESİ MATEMATİK BÖLÜMÜ
MAT3301 FİNAL SINAVI SORULARI ve ÇÖZÜMLERİ

1. (a) $\mathbb{Z}_{30}$ grubunun $\langle\overline{6}\rangle$ normal altgrubu veriliyor. $\mathbb{Z}_{30}/\langle\overline{6}\rangle$ bölüm grubunun elemanlarını belirleyiniz.

   Çözüm: $\langle\overline{6}\rangle = \{\overline{0}, \overline{6}, \overline{12}, \overline{18}, \overline{24}\}$ şeklindedir. Ayrıca $|\mathbb{Z}_{30}/\langle\overline{6}\rangle| = \dfrac{|\mathbb{Z}_{30}|}{|\langle\overline{6}\rangle|} = \dfrac{30}{5} = 6$ bulunur. Buradan $\mathbb{Z}_{30}/\langle\overline{6}\rangle = \{\overline{0}+\langle\overline{6}\rangle, \overline{1}+\langle\overline{6}\rangle, \overline{2}+\langle\overline{6}\rangle, \overline{3}+\langle\overline{6}\rangle, \overline{4}+\langle\overline{6}\rangle, \overline{5}+\langle\overline{6}\rangle\}$ şeklinde elde edilir.

   (b) S_4 simetrik grubunun $H = \langle(1,2,3)\rangle$ altgrubu normal midir? Araştırınız.

   Çözüm: $H = \langle(1,2,3)\rangle = \{(1), (1,2,3)(1,3,2)\}$ şeklindedir. $(1,4) \in S_4$ ve $(1,2,3) \in H$ için $(1,4)(1,2,3)(1,4)^{-1} = (1,4)(1,2,3)(1,4) = (2,3,4) \notin H$ bulunur. Böylece H altgrubu S_4 ün bir normal altgrubu değildir.

2. (a) Mertebesi 45 olan bir grup basit midir? Araştırınız.

   Çözüm: G mertebesi 45 olan bir grup olsun. $45 = 3^2 5$ olduğundan G nin Sylow 3 ve Sylow 5-altgrupları vardır. G nin Sylow 3-altguplarının sayısı n_3 olmak üzere $n_3 \mid 45$ ve $n_3 \equiv 1(\text{mod}3)$ dür. Buradan $n_3 = 1$ dir. Dolayısıyla G nin bir tek Sylow 3-altgrubu vardır. Bu altgrup P ile gösterilsin. Sylow Teoremleri gereğince $P \trianglelefteq G$ dir. Ayrıca $3^m \mid 45$ ve $3^{m+1} \nmid 45$ olacak şekilde $m = 2$ olduğundan $|P| = 9$ olup $P \neq G$ ve $P \neq \{e\}$ dir. Böylece mertebesi 45 olan bir grup basit değildir.

   (b) $Q_8 \times S_5$ grubunda $(i, (1,2,3)(4,5))$ elemanının mertebesini bulunuz.

   Çözüm: S_5 simetrik grubunda $o((1,2,3)(4,5)) = ekok(o((1,2,3)), o((4,5))) = ekok(3,2) = 6$ ve Q_8 grubunda $o(i) = 4$ olup $Q_8 \times S_5$ grubunda $o((i,(1,2,3)(4,5))) = ekok(o(i), o((1,2,3)(4,5))) = ekok(4,6) = 12$ bulunur.

3. (a) $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ grubunun bütün altgruplarını belirleyiniz.

   Çözüm: $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 = \{(\overline{0},\overline{0}), (\overline{0},\overline{1}), (\overline{1},\overline{0}), (\overline{1},\overline{1})\}$ şeklindedir. $|\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2| = 4$ olduğundan $H \leq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ ise Lagrange Teoremi gereğince $|H| \mid 4$ dür. Buradan $|H|$ =1,2 yada 4 olabilir. Eğer $|H| = 1$ ise $H_1 = \langle(\overline{0},\overline{0})\rangle = \{(\overline{0},\overline{0})\}$ dir. Eğer $|H| = 2$ ise mertebesi asal olan her grup devirli olduğundan bu gruplar $H_2 = \langle(\overline{0},\overline{1})\rangle = \{(\overline{0},\overline{0}), (\overline{0},\overline{1})\}$, $H_3 = \langle(\overline{1},\overline{0})\rangle = \{(\overline{0},\overline{0}), (\overline{1},\overline{0})\}$, $H_4 = \langle(\overline{1},\overline{1})\rangle = \{(\overline{0},\overline{0}), (\overline{1},\overline{1})\}$ şeklindedir. Eğer $|H| = 4$ ise $H_5 = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ olur.

   (b) $f([1]_{12}) = [2]_3$ ile tanımlanan $f\colon \mathbb{Z}_{12} \to \mathbb{Z}_3$ grup homomorfizmasının **çekirdeğini** belirleyiniz.

   Çözüm: $[x]_{12} \in \mathbb{Z}_{12}$ olsun. f bir homomorfizma olduğundan;

$$\begin{aligned} f([x]_{12}) &= f(x[1]_{12}) \\ &= f(\underbrace{[1]_{12} + [1]_{12} + \cdots + [1]_{12}}_{x\text{-tane}}) \\ &= \underbrace{f([1]_{12}) + f([1]_{12}) + \cdots + f([1]_{12})}_{x\text{-tane}} \\ &= xf([1]_{12}) \\ &= 2[x]_3 \end{aligned}$$

   elde edilir. Böylece;

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Ker} f &= \{[x]_{12} \in \mathbb{Z}_{12} : f([x]_{12}) = [0]_3\} \\
&= \{[x]_{12} \in \mathbb{Z}_{12} : 2[x]_3 = [0]_3\} \\
&= \{[x]_{12} \in \mathbb{Z}_{12} : 2x \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 3)\} \\
&= \{[x]_{12} \in \mathbb{Z}_{12} : 3 \mid 2x\} \\
&= \{[x]_{12} \in \mathbb{Z}_{12} : 3 \mid x\} \\
&= \{[x]_{12} \in \mathbb{Z}_{12} : x = 3k \text{ olacak şekilde } k \in \mathbb{Z} \text{ var}\} \\
&= \{[3k]_{12} \in \mathbb{Z}_{12} : k \in \mathbb{Z}\} \\
&= \{[0]_{12}, [3]_{12}, [6]_{12}, [9]_{12}\} \\
&= \langle [3]_{12} \rangle
\end{aligned}
$$

şeklindedir.

4. (a) $\mathbb{Z}_{30}$ grubunu aşikar olmayan **iki** altgrubunun direkt toplamı olarak yazınız.

Çözüm: $\mathbb{Z}_{30} = \langle \overline{1} \rangle$ olduğundan bir devirli gruptur. Ayrıca $|\mathbb{Z}_{30}| = 30$ olduğundan $\mathbb{Z}_{30}$ grubunun bütün altgrupları $d \mid 30$ olmak üzere $\langle d\overline{1} \rangle$ şeklindedir. Böylece bütün aşikar olmayan altgrupları $\langle \overline{2} \rangle, \langle \overline{3} \rangle, \langle \overline{5} \rangle, \langle \overline{6} \rangle, \langle \overline{10} \rangle, \langle \overline{15} \rangle$ şeklinde elde edilir. $\mathbb{Z}_{30} = \langle \overline{5} \rangle + \langle \overline{6} \rangle$ ve $\langle \overline{5} \rangle \cap \langle \overline{6} \rangle = \{\overline{0}\}$ olduğundan $\mathbb{Z}_{30} = \langle \overline{5} \rangle \oplus \langle \overline{6} \rangle$ bulunur.

(b) Mertebesi 200 olan ve birbirine izomorf olmayan bütün değişmeli grupları belirleyiniz.

Çözüm: $200 = 2^3 5^2$ olup 3 ve 2 nin parçalanmaları

$$
\begin{array}{cc}
(3) & (2) \\
(2,1) & (1,1) \\
(1,1,1) &
\end{array}
$$

olduğundan Sonlu Değişmeli Grupların Temel Teoremi gereğince p(3)p(2)=6 adet birbirine izomorf olmayan değişmeli grup vardır. Bu gruplar

$$
\begin{array}{ll}
\mathbb{Z}_{2^3} \oplus \mathbb{Z}_{5^2} & \mathbb{Z}_{2^2} \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_5 \\
\mathbb{Z}_{2^3} \oplus \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_5 & \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{5^2} \\
\mathbb{Z}_{2^2} \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{5^2} & \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_5
\end{array}
$$

şeklindedir.