

A.Ü. FEN FAKÜLTESİ MATEMATİK BÖLÜMÜ
MAT3301 FINAL SINAVI SORULARI ve ÇÖZÜMLERİ

1. (a) Lagrange Teoremi yardımıyla S_3 simetrik grubunun bütün altgruplarını belirleyiniz.

Çözüm: $|S_3| = 3! = 6$ olduğundan $H \leq S_3$ ise Lagrange Teoremi gereğince $|H| \mid 6$ dır. Buradan $|H| = 1, 2, 3$ veya 6 olabilir. Eğer $|H| = 1$ ise $H_1 = \langle (1) \rangle = \{(1)\}$ dir. Eğer $|H| = 2$ ise mertebesi asal olan her grup devirli olduğundan bu gruplar $H_2 = \langle (1, 2) \rangle = \{(1), (1, 2)\}$, $H_3 = \langle (1, 3) \rangle = \{(1), (1, 3)\}$, $H_4 = \langle (2, 3) \rangle = \{(1), (2, 3)\}$ şeklindedir. Eğer $|H| = 3$ ise $H_5 = \langle (1, 2, 3) \rangle = \{(1), (1, 2, 3), (1, 3, 2)\} = \langle (1, 3, 2) \rangle = A_3$ olur. Eğer $|H| = 6$ ise o zaman $H_6 = S_3$ dır.

- (b) S_4 simetrik grubunun $H = \langle (1, 2)(3, 4) \rangle$ altgrubu veriliyor. $H \trianglelefteq G$ midir? Araştırmız.

Çözüm: $H = \langle (1, 2)(3, 4) \rangle = \{(1), (1, 2)(3, 4)\}$ şeklindedir. $(1, 3) \in S_4$ ve $(1, 2)(3, 4) \in H$ için $(1, 3)(1, 2)(3, 4)(1, 3)^{-1} = (1, 3)(1, 2)(3, 4)(1, 3) = (1, 4)(2, 3) \notin H$ bulunur. Böylece H altgrubu S_4 ün bir normal altgrubu değildir.

2. (a) $G = U(15)$ grubunun $N = \langle \bar{8} \rangle$ normal altgrubu veriliyor. Buna göre G/N bölüm grubunun elemanlarını belirleyiniz.

Çözüm: $U(15) = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{11}, \bar{13}, \bar{14}\}$ ve $N = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{8}\}$ şeklindedir. Ayrıca $|U(15)/N| = |U(15)|/|N| = 8/4 = 2$ bulunur. Buradan $U(15)/N = \{N, \bar{7}N\}$ şeklinde elde edilir.

- (b) $\mathbb{Z}_{30}$ grubunu aşikar olmayan **iki altgrubunun** direkt toplamı olarak ifade ediniz.

Çözüm: $\mathbb{Z}_{30} = \langle \bar{1} \rangle$ olduğundan bir devirli gruptur. Ayrıca $|\mathbb{Z}_{30}| = 30$ olduğundan $\mathbb{Z}_{30}$ grubunun bütün altgrupları $d \mid 30$ ve $d \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $\langle d\bar{1} \rangle$ şeklindedir. Böylece bütün aşikar olmayan altgrupları $\langle \bar{2} \rangle, \langle \bar{3} \rangle, \langle \bar{5} \rangle, \langle \bar{6} \rangle, \langle \bar{10} \rangle, \langle \bar{15} \rangle$ şeklinde elde edilir. $\mathbb{Z}_{30} = \langle \bar{5} \rangle + \langle \bar{6} \rangle$ ve $\langle \bar{5} \rangle \cap \langle \bar{6} \rangle = \{0\}$ olduğundan $\mathbb{Z}_{30} = \langle \bar{5} \rangle \oplus \langle \bar{6} \rangle$ bulunur.

3. (a) Bilinen işlemleriyle $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{R}^*$ grupları izomorf mudur? Araştırmız.

Çözüm: $(\mathbb{R}, +)$ ve $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ grupları izomorf değildir. Kabul edelim ki $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ bir izomorfizma olsun. Bu durumda f örten olduğundan $f(a) = -1$ olacak şekilde bir $a \in \mathbb{R}$ vardır. f homomorfizma olduğundan

$$-1 = f(a) = f\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a\right) = f\left(\frac{1}{2}a\right)f\left(\frac{1}{2}a\right) = \left[f\left(\frac{1}{2}a\right)\right]^2$$

elde edilir. Bu bir çelişkidir.

- (b) G bir grup ve $H, K \trianglelefteq G$ olsun. Her $g \in G$ için $\theta(g) = (gH, gK)$ şeklinde tanımlanan $\theta : G \rightarrow G/H \times G/K$ grup homomorfizmasının çekirdeğini belirleyiniz.

Çözüm:

$$\begin{aligned} \text{Ker}\theta &= \{g \in G : \theta(g) = (H, K)\} \\ &= \{g \in G : (gH, gK) = (H, K)\} \\ &= \{g \in G : gH = H \text{ ve } gK = K\} \\ &= \{g \in G : g \in H \text{ ve } g \in K\} \\ &= \{g \in G : g \in H \cap K\} \\ &= H \cap K \end{aligned}$$

şeklindedir.

4. (a) Mertebesi 45 olan bir grup basit midir? Araştırınız.

Çözüm: G mertebesi 45 olan bir grup olsun. $45 = 3^2 \cdot 5$ olduğundan G nin Sylow 3 ve Sylow 5-altgrupları vardır. G nin Sylow 3-altgruplarının sayısı n_3 olmak üzere $n_3 \mid 45$ ve $n_3 \equiv 1 \pmod{3}$ dür. Buradan $n_3 = 1$ dir. Dolayısıyla G nin bir tek Sylow 3-alt grubu vardır. Bu altgrup P ile gösterilsin. Sylow Teoremleri gereğince $P \trianglelefteq G$ dir. Ayrıca $3^m \mid 45$ ve $3^{m+1} \nmid 45$ olacak şekilde $m = 2$ olduğundan $|P| = 9$ olup $P \neq G$ ve $P \neq \{e\}$ dir. Böylece mertebesi 45 olan bir grup basit değildir.

- (b) Mertebesi 144 olan ve birbirine izomorf olmayan bütün değişmeli grupları belirleyiniz.

Çözüm: $144 = 2^4 \cdot 3^2$ olup 4 ve 2 nin parçalanmaları

$$\begin{array}{ll} (4) & (2) \\ (3, 1) & (1, 1) \\ (2, 2) & \\ (2, 1, 1) & \\ (1, 1, 1, 1) & \end{array}$$

olduğundan Sonlu Değişmeli Grupların Temel Teoremi gereğince $p(4)p(2)=10$ adet birbirine izomorf olmayan değişmeli grup vardır. Bu gruplar

$$\begin{array}{ll} \mathbb{Z}_{2^4} \oplus \mathbb{Z}_{3^2} & \mathbb{Z}_{2^2} \oplus \mathbb{Z}_{2^2} \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3 \\ \mathbb{Z}_{2^4} \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3 & \mathbb{Z}_{2^2} \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{3^2} \\ \mathbb{Z}_{2^3} \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{3^2} & \mathbb{Z}_{2^2} \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3 \\ \mathbb{Z}_{2^3} \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3 & \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{3^2} \\ \mathbb{Z}_{2^2} \oplus \mathbb{Z}_{2^2} \oplus \mathbb{Z}_{3^2} & \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3 \end{array}$$

şeklindedir.