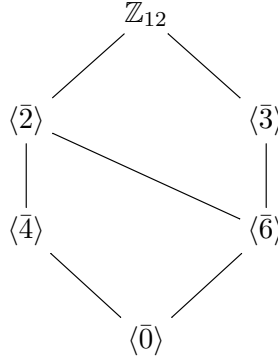


A.Ü.FEN FAKÜLTESİ MATEMATİK BÖLÜMÜ
MAT3302 FİNAL SINAVI SORULARI ve ÇÖZÜMLERİ

1. (a) $\mathbb{Z}_{12}$ halkasının bütün maksimal ideallerini belirleyiniz.

Çözüm: $\mathbb{Z}_{12}$ halkasının idealleri $\mathbb{Z}_{12}, \langle \bar{2} \rangle, \langle \bar{3} \rangle, \langle \bar{4} \rangle, \langle \bar{6} \rangle, \langle \bar{0} \rangle$ olup ideallerin Hasse diyagramı



şeklindedir. Böylece $\mathbb{Z}_{12}$ nin maksimal idealleri $\langle \bar{2} \rangle$ ve $\langle \bar{3} \rangle$ dir.

- (b) $\mathbb{Q}[x]$ polinomlar halkasında $f(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 + \frac{1}{4}$ polinomu veriliyor. Buna göre $f(x)$ polinomunun $x - \frac{1}{2}$ polinomuna bölümünden kalanı belirleyiniz.

Çözüm: $f(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 + \frac{1}{4} \in \mathbb{Q}[x]$ polinomunun $x - \frac{1}{2}$ polinomuna bölümünden kalan, Kalan Teoremi gereğince $f(\frac{1}{2}) = \frac{3}{16}$ dir.

2. $\mathbb{Z}_7[x]$ polinomlar halkasında $f(x) = \bar{3}x^2 + \bar{2}$ ve $g(x) = x^4 + \bar{5}x^2 + \bar{2}x + \bar{2}$ polinomları veriliyor. Buna göre;

- (a) $\text{ebob}(f(x), g(x)) = d(x)$ polinomunu bulunuz.

Çözüm: Bölüm algoritmasını ardışık olarak uygulayacak olursak,

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x)(\bar{5}x^2 + \bar{3}) + \bar{2}x + \bar{3} \\ f(x) &= (\bar{2}x + \bar{3})(\bar{5}x + \bar{3}) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $f(x)$ ve $g(x)$ polinomları için en büyük ortak bölen adayı $\bar{2}x + \bar{3}$ dir. En büyük ortak bölenin monik olması gerektiğinden $\text{ebob}(f(x), g(x)) = d(x) = \bar{4}(\bar{2}x + \bar{3}) = x + \bar{5}$ dir.

- (b) $d(x) = f(x)s(x) + g(x)t(x)$ olacak şekilde $s(x), t(x) \in \mathbb{Z}_7[x]$ polinomlarını belirleyiniz.

Çözüm: $d(x) = \bar{4}(\bar{2}x + \bar{3}) = \bar{4}(g(x) - f(x)(\bar{5}x^2 + \bar{3})) = f(x)(x^2 + \bar{2}) + g(x)\bar{4}$ olduğundan $s(x) = x^2 + \bar{2}$ ve $t(x) = \bar{4}$ şeklindedir.

3. (a) $\mathbb{Z}_5[x]$ polinomlar halkasında $f(x) = \bar{2}x^3 + x^2 + \bar{3}$ polinomu indirgenmez midir? Araştırmız.

Çözüm: $\deg(f(x))=3$ ve $f(\bar{0}) \neq \bar{0}, f(\bar{1}) \neq \bar{0}, f(\bar{2}) \neq \bar{0}, f(\bar{3}) \neq \bar{0}$ ve $f(\bar{4}) \neq \bar{0}$ olduğundan $f(x)$ polinomu $\mathbb{Z}_5[x]$ polinomlar halkasında indirgenmezdir.

- (b) $p(x) = 2x^5 - 27x^2 + 3 \in \mathbb{Q}[x]$ polinomu veriliyor. $P = \langle p(x) \rangle$ olmak üzere $\mathbb{Q}[x]/P$ bölüm halkası bir cisim midir? Araştırmız.

Çözüm: $p = 3$ asalı için $3 \mid 3, 3 \mid -27, 3 \nmid 2$ ve $3^2 \nmid 3$ olduğundan Eisenstein İndirgenmezlik Kriteri gereğince $p(x)$ polinomu $\mathbb{Q}[x]$ halkasında indirgenmezdir. Böylece $\mathbb{Q}[x]/P$ bölüm halkası bir cisimdir.

4. (a) $\mathbb{Z}_3[x]$ polinomlar halkasının $P = \langle x^2 + \bar{1} \rangle$ ideali veriliyor. Buna göre $\mathbb{Z}_3[x]/P$ bölüm halkasında $\bar{2}x + \bar{1} + P$ elemanının çarpımsal tersini bulunuz.

Çözüm: $p(x) = x^2 + \bar{1}$ ve $f(x) = \bar{2}x + \bar{1}$ olmak üzere $\text{ebob}(p(x), f(x)) = d(x)$ polinomunu bulmak için bölüm algoritmasını uygulayacak olursak,

$$p(x) = f(x)(\bar{2}x + \bar{2}) + \bar{2}$$

elde edilir. En büyük ortak bölenin monik olması gerektiğinden $d(x) = \bar{2}.\bar{2} = \bar{1}$ dir. Buradan

$$\begin{aligned} \bar{1} &= \bar{2}(p(x) - f(x)(\bar{2}x + \bar{2})) \\ \bar{1} + P &= \bar{2}(p(x) - f(x)(\bar{2}x + \bar{2})) + P \\ \bar{1} + P &= \bar{2}p(x) + P + f(x)(\bar{2}x + \bar{2}) + P \\ \bar{1} + P &= f(x)(\bar{2}x + \bar{2}) + P \\ \bar{1} + P &= (f(x) + P)(\bar{2}x + \bar{2} + P) \end{aligned}$$

olduğundan $\bar{2}x + \bar{1} + P$ elemanının çarpımsal tersi $\bar{2}x + \bar{2} + P$ dir.

- (b) $R = \mathbb{Z}_2$ halkası ve $G = S_2 = \{(1), (1, 2)\}$ simetrik grubu veriliyor. Bu durumda $R[G]$ grup halkası sıfır bölensiz midir? Araştırmız.

Çözüm: $R[G] = \{\bar{0}(1) + \bar{0}(1, 2), \bar{1}(1) + \bar{0}(1, 2), \bar{0}(1) + \bar{1}(1, 2), \bar{1}(1) + \bar{1}(1, 2)\}$ şeklindedir ve sıfırı $\bar{0}(1) + \bar{0}(1, 2)$ dir. $\bar{1}(1) + \bar{1}(1, 2) \in R[G]$ için

$$\begin{aligned} [\bar{1}(1) + \bar{1}(1, 2)][\bar{1}(1) + \bar{1}(1, 2)] &= \bar{1}(1) + \bar{1}(1, 2) + \bar{1}(1) + \bar{1}(1, 2) \\ &= \bar{0}(1) + \bar{0}(1, 2) \end{aligned}$$

olduğundan $R[G]$ grup halkası sıfır bölensiz değildir.